

O różnych spojrzeniach na QFT i efekt Casimira

Kamil Ziemian
ziemniakzkosmosu@gmail.com

21 stycznia 2016 r.

- 1 Osobiste poglądy
- 2 QFT
- 3 Efekt Casimira – standardowe podejście

To wystąpienie to bardziej zbiór pytań niż odpowiedzi.

Może ktoś z was będzie umiał powiedzieć jak je rozwiązać, ja nie jestem w stanie.

Ostrzeżenie i osobiste przemyślenia

Celem nauk przyrodniczych nie jest...

- zajęcie bardziej prestiżowego miejsca w społeczeństwie;
- zdawanie egzaminów;
- zrobienie kariery naukowej;
- zdobycie ogromnych grantów;
- stanie się sławnym;
- wyrywanie kobiet;
- picie alkoholu w dobrym/niedobrym towarzystwie;
- oglądanie seriali, granie w gry (mea culpa) etc.;
- zajmowanie się czymś, bo na Zachodzie się tym zajmują
- nie zajmowanie się czymś, bo lepsi od nas tego nie robili;
- „nabicie” wysokiego indeksu Hirscha;
- ani nawet, szukanie zastosowań technologicznych (to nie *cel*, acz też jest ważne).

Ostrzeżenie i osobiste przemyślenia

Cel pierwszy i najważniejszy

Zrozumienie otaczającego nas świata.

Cel drugi

Zrozumienie wszystkich konsekwencji, jakie z tej wiedzy naprawdę wynikają. To łączy się z pytaniami o zastosowania.

Po cóż jest więc kwantowa teorii pola ???

Uwaga o kryteriach filozoficznych i estetycznych

Absurdalność, matematyczna nonsensowność i największa nawet brzydota, nie są dobrymi powodami by odrzucić teorię która w poprawny sposób opisuje świat wokół nas. Tym bardziej, jeśli żadna inna nie była w stanie powtórzyć jej sukcesów.

Potrzeba istnienia jakiejś teorii

Fakty doświadczalne

- Widma atomowe.
- Istnieją elektrony.
- Istnieje pole elektromagnetyczne, bardzo dobrze opisywane teorią Clerka-Maxwella.
- Cząstki mogą być kreowane lub anihilowane (dziwne).
- Cząstki mogą kreować cząstki innych typów (bardzo dziwne).

Wnioski

- Widma atomowe i elektrony $\Rightarrow$ mechanika kwantowa.
- Pole elektromagnetyczne $\Rightarrow$ szczególna teoria względności.

Problemy

- Co się dzieje, gdy elektron porusza się naprawdę szybko?
- Skoro cząstki są kwantowe, to czy pole elektromagnetyczne też?

Problem profesora Sadzikowskiego

Jeśli by ktoś podszedł i walnął bardzo szybko patelnię w ścianę wydziału FAIS, to nie oczekuję, że zostanie po tym laptop, lody cytrynowe, dwa koty i długopis, lecące we wszystkie strony z dużą prędkością.

Lagranżjan elektrodynamiki kwantowej (QED)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \quad (1)$$

Uwagi

- **SWOBODNE i PRAWIE SWOBODNE** pole elektromagnetyczne $F_{\mu\nu}$ można rozłożyć na fotony.
- Jeśli chodzi o naprawdę oddziałujące, to nie wiem czy ktoś potrafi rozstrzygnąć czy również jest to wykonalne (może jestem ignorantem).
- **SWOBODNE i PRAWIE SWOBODNE** pole Diraca ψ można rozłożyć na elektrony i pozytony.
- Reszta jak powyżej.

Standardowe podejście do QFT

Uwagi cd.

- Jeżeli ma sens powiedzenie, że foton jest kwantem pola elektromagnetycznego, to elektron i pozyton są kwantami pola Diraca. Jest to dobra wiadomość, bowiem wyjaśnia dlaczego elektrony w przyrodzie są tak podobne do siebie.
- Każde pole kwantowe kreuje i anihiluje cząstki.
- Teoria ta działa rewelacyjnie, choć trzeba renormalizować.
- Dirac ją odrzucił twierdząc, że jest brzydka.

Czym jednak jest pole kwantowe?

Odpowiedź fizyka: obiektem który reprezentuje cząstki.

Więcej się nie dowiedziałem, ale może za mało pytałem?

Aksjomaty Wightmana

M „=” $\mathbb{R}^4$ przestrzeń Minkowskiego, $\mathcal{H}$ przestrzeń Hilberta, $S(M)$ przestrzeń „dobrych” funkcji zespolonych, najlepiej klasy Schwartza (jeden z powodów dlaczego prof. Herdegen je tak lubi). Pole kwantowe $F_{\mu\nu}$ to dystrybucja która funkcji $f \in S(M)$ przyporządkowuje operator $F_{\mu\nu}(f)$ na $\mathcal{H}$.

Aksjomatów tych jest więcej, ale nam nie będą one potrzebne.

Porażka

Do dziś nikt nie był w stanie podać w ramach podejścia Wightmana teorii w czterech wymiarach, która nie jest **swobodna!!!**

Dobre strony podejścia Wightmana i pokrewnych

- Mówi czym pole kwantowe jest :).
- W mechanice kwantowej fundamentem jest przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ i czas t , przestrzeń pojawia się jako sposób diagonalizacji operatorów $\hat{x}_i$. Podejście Wightmana w przejrzysty sposób pokazuje, że w QFT musimy dołączyć nowy byt: czasoprzestrzeń Minkowskiego.
- **Udowodniono** twierdzenia CPT i spin-statystyka.
- Udało się sformułować najlepsze, w mojej opinii, wersje QFT na zadanych zakrzywionych czasoprzestrzeniach.

Zaraz, zaraz, ty coś ściemniasz

Przecież napisałeś

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, \quad (2)$$

a przecież ktoś taki jak ty, powinien wiedzieć, że dystrybucji się nie mnoży.

Zgadza się

Co najmniej od lat 50 XX wieku, wielu autorów, że właśnie mnożenie dystrybucji jest przyczyną istnienia rozbieżności w ultrafiolecie, podczas gdy rozbieżności podczerwone niosą treść fizyczną.

Osiągnięcia

Epstein i Glaser w latach 70 XX wieku pokazali, że na poziomie grafów Feynmana używając poprawnej teorii mnożenia i rozszerzania dystrybucji można wyeliminować wszystkie rozbieżności w ultrafiolecie.

Efekt Casimira – standardowe podejście

Masywne pole skalarne

Lagrażjan:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi(t, x) \partial^\mu \varphi(t, x) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^2(t, x). \quad (3)$$

Równanie Kleina-Gordona:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(t, x) = 0. \quad (4)$$

Hamiltonian bezpośredni skwantowanej teorii w przestrzeni pędów

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int dk dk' \hbar \sqrt{\omega_k \omega_{k'}} (a_{k'}^\dagger a_k + a_{k'} a_k^\dagger), \quad (5)$$

$$\omega_k = \sqrt{c^2 k^2 + m^2 c^4}.$$

Efekt Casimira – standardowe podejście

Z tamtym hamiltonianem ciężko cokolwiek zrobić

Standardowa rozwiązanie (ja nie umiem inaczej):

$$\hat{H} = \int dk \, \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \frac{\hbar}{2} \int dk \, \omega_k. \quad (6)$$

Co zrobić z nieskończoną energią stanu podstawowego (zwaną zwykle energią próżni)?

Recepta Diraca

„Ponieważ w fizyce mają znaczenie tylko różnice energii, więc energię stanu podstawowego należy przyjąć za punkt odniesienia i położyć 0.”

Riposta Pauli’ego

„Tylko dlatego, że coś jest nieskończone, to jeszcze nie znaczy, że możesz je przyjąć równe zero.”

Efekt Casimira – standardowe podejście

W praktyce

Recepta Diraca prawie zawsze działa. Efekt Casimira to jeden z przypadków, gdy nie działa.

Jeżeli ustawimy w punktach $x = 0$ i $x = a$, dwie płyty metalowe, to pole φ musi na nich znikać (bo ma się zachowywać jak pole elektryczne na granicy przewodnika):

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, a) = 0.$$

Takie pole ma postać:

$$\varphi_n^{(\pm)}(t, x) = \left(\frac{c}{a\omega_n} \right)^{1/2} e^{\pm i\omega_n t} \sin(k_n x); \quad (7)$$

$$\omega_n = \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{1/2}, \quad k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nieskończona energia próżni na odcinku $(0, a)$

$$E_0(a) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n. \quad (8)$$

Hendrik Casimir stwierdził

Nieskończoność nieskończoności nie równa, więc jeśli *nieskończone* energia pustej przestrzeni przypadająca na przedział $(0, a)$, jest różna od *nieskończonej* energii między płytami, powinna pojawić się siła dążąca do korzystniejszej konfiguracji energetycznej.

Efekt Casimira – standardowe podejście

Aby odjąć dwie nieskończoności, trzeba najpierw uczynić je skończonymi

$$E(\text{prostej}) = L \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk \omega_k,$$

gdzie L , to długość prostej. Na rozpatrywanym odcinku zgromadzona jest energia:

$$\frac{a}{L} E(\text{prostej}) = \frac{\hbar a}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk \omega_k. \quad (9)$$

No, już trochę lepiej, ale wciąż jest za duża. Przyjmijmy dla prostoty $m = 0$

$$\frac{\hbar a}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk \omega_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\hbar c a}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk k e^{-\delta c k} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\hbar a}{2\pi c \delta^2}. \quad (10)$$

Efekt Casimira – standardowe podejście

Potrzebujemy zregularyzować jeszcze jedną nieskończoność

$$E(\text{odcinak}) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\pi n}{a} \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{\delta c\pi n}{a}\right) \quad (11)$$

Znów $m = 0$.

Wychodzi

$$E(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [E(\text{odcinek}, \delta) - E(\text{prosta}, \delta)] = -\frac{\pi \hbar c}{24a}. \quad (12)$$

Co daje siłę:

$$F(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{\pi \hbar c}{24a^2}. \quad (13)$$

Problemy i uwagi

- Bardzo dobrze zgadza się z rzeczywistością.
- Ponieważ liczymy tylko energię zawartą w naszym odcinku, to nie jest zaskakujące, że opłaca mu się kurczyć. To co mogłoby być dziwne, to fakt, iż ta energia ta dąży do $-\infty$.
- Pole swobodne ma zawsze „więcej” częstości niż zamknięte w pudle, „dlatego” ma wyższą energię.

Warto zajmować się fizyką. Jest w niej wiele ciekawych problemów do rozwiązania:).

Dziękuję bardzo.

- R. F. Streater, A. S. Wightman, „PCT, Spin and Statistics and All That – aksjomatyka Wightmana (zaskoczeni);
- R. F. Streater, „Wightman quantum field theory”;
- S. Hollands, R. M. Wald, „Axiomatic quantum field theory in curved spacetime”, „Quantum fields in curved spacetime” – QFT na zakrzywionych czasoprzestrzeniach;
- K. J. Keller, „Dimensional Regularization in Position Space and a Forest Formula for Regularized Epstein-Glaser Renormalization”;
- M. Duetsch, K. Fredenhagen, K. J. Keller, K. Rejzner, „Dimensional Regularization in Position Space, and a Forest Formula for Epstein-Glaser Renormalization”;
- M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, „New Developments in the Casimir Effect”, standardowe podejście do efektu Casimira.

- R. Haag, „Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras.” – algebraiczne sformułowanie teorii pola.
<http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-61458-3>. Można pobrać z komputera UJ, lub logując się przez Extranet.